PART2　円に内接する四角形の面積

例題

円に内接する四角形 ABCD において

$AB=2,\ BC=3,\ CD=2,\ \angle ABC=60^\circ$

のとき，次の値を求めよ。

(1)　AC の長さ　　(2)　AD の長さ　　(3)　四角形 ABCD の面積

Point Pickup

練習

円に内接する四角形 ABCD において

$$\mathrm{AB}=\sqrt{2},\ \mathrm{BC}=1,\ \mathrm{CD}=1,\ \angle\mathrm{ABC}=135^\circ$$

のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。

第 12 講　PART2　確認問題

1　円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{CD}=4$，$\angle \mathrm{ABC}=60^\circ$ のとき，四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

$$S=\frac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

PART2　円に内接する四角形の面積

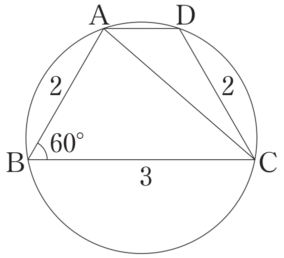
例題

円に内接する四角形 ABCD において

$AB=2$，$BC=3$，$CD=2$，$\angle ABC=60^\circ$

のとき，次の値を求めよ。

(1)　AC の長さ　(2)　AD の長さ　(3)　四角形 ABCD の面積



(1)　△ABC において余弦定理より

$$AC^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos 60^\circ$$

$$=4+9-2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=7$$

$AC>0$ より　$AC=\sqrt{7}$

(2)　四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

$AD=x$ とおくと，△ACD において余弦定理より

$$(\sqrt{7})^2=x^2+2^2-2\cdot x\cdot 2\cdot\cos 120^\circ$$

$$x^2+2x-3=0 \qquad (x+3)(x-1)=0$$

$x>0$ より $x=1$

よって $AD=1$

(3)　四角形 ABCD の面積 S は

$$S=\triangle ABC+\triangle ACD$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\cdot\sin 120^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

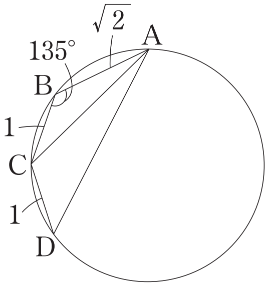
$$=2\sqrt{3}$$

練習

円に内接する四角形 ABCD において

$AB=\sqrt{2}$，$BC=1$，$CD=1$，$\angle ABC=135^\circ$

のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。



△ABC において余弦定理より

$$AC^2=(\sqrt{2})^2+1^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\cos135^\circ$$
$$=2+1-2\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=5$$

$AC>0$ より $AC=\sqrt{5}$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-135^\circ=45^\circ$$

$AD=x$ とおくと，△ACD において余弦定理より

$$(\sqrt{5})^2=x^2+1^2-2\cdot x\cdot1\cdot\cos45^\circ$$

$$x^2-\sqrt{2}x-4=0 \qquad x=\frac{-(-\sqrt{2})\pm\sqrt{(-\sqrt{2})^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm3\sqrt{2}}{2}$$

$$x=2\sqrt{2},\ -\sqrt{2}$$

$x>0$ より $x=2\sqrt{2}$

よって $AD=2\sqrt{2}$

したがって，四角形 ABCD の面積 S は

$$S=\triangle ABC+\triangle ACD$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\sin135^\circ+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\sqrt{2}\cdot\sin45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{3}{2}$$

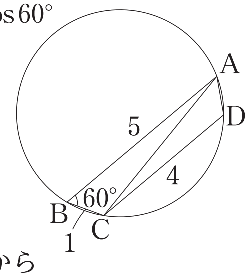
第12講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：9，イ：3，ウ：4

[解説]

△ABC において余弦定理より

$$AC^2 = 5^2 + 1^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ$$
$$= 25 + 1 - 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 21$$



AC > 0 より　$AC = \sqrt{21}$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$AD = x$ とおくと，△ACD において余弦定理より

$$(\sqrt{21})^2 = x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ$$
$$x^2 + 4x - 5 = 0$$
$$(x+5)(x-1) = 0$$

$x > 0$ より　$x = 1$

よって　AD = 1

四角形の面積 S は

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD$$ **[A]**

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \mathbf{\frac{9\sqrt{3}}{4}}$$

> [A]　円に内接する四角形の面積
> 円に内接する四角形の対角の和が 180° であることを利用し，四角形の面積を，対角線によって分割された 2 つの三角形の面積の和として求める。